III Fonctions différentiables d'une variable réelle

I Def et premières pptés

Def : Soit f :D->R définie au voisinage d'un point x0
On dit que f est derivable en x0 ssi

1) (première forme)
La fonction $T_{x0=}\frac{f(x)-f(x0)}{x-x0}$ lorsque x tend vers x0 par valeurs distinctes de x0

Ie : lim(x->x0 x !=x0) $\frac{f(x)-f(x0)}{x-x0}$ existe

∃ l € R / ∀ epsilon > 0 , ∃ alpha > 0 / |x-x0 et x != x0 => |$\frac{f(x)-f(x0)}{x-x0}$ - l | < epsilon

∃ l € R / ∀ epsilon > 0 , ∃ alpha > 0 /|x – x0| < alpha => |f(x)-f(x0)-(x-x0)l| < epsilon|x-x0|

Lorsque cette limite existe, on la note f'(x0) et on l'appelle la dérivée de f en x0

2) (deuxième forme)
Il existe un nombre l € R, une fonction epsilon(x) aec lim(x->x0 ;x !=x0) epsilon(x) = 0
Telle que
$\forall\ x\ \in]x0-x, x0+x[\ , f(x) = f(x0) + l(x-x0) + (x-x0)\varepsilon(x)$

Remarque :
1- « Moralement » f est derivable en x0 signifie que au voisinage de x0 les valeurs de f sont approchables pas les valeurs d'une fontion affine
$x \to f(x0) + (x-x0)f(x0)$

2- Si f est derivable en x0, la droite d'équation $y = f(x0) + f(x0)(x-x0)$ est appellée la tangente au graphe de f

Prop :
Soit $f: D \to R$ dérivable en x0 alors f est continue en x0
Preuve : f est continue en x0, $\lim_{\substack{x\to x0 \\ x\neq x0}} f(x) = f(x0)$
Si f est dérivable en x0, on a sur un voisinnage de x0
$f(x) = f(x0) + (x-x0).f'(x0) + (x-x0)\varepsilon(x)$
Où $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(x0)$

Remarque : La réciproque est fausse : *continue !=>dérivable*

Prop :
Soit $f: D \to R$ dérivable en x0
Si f admet un maximum local en x0 (Respectivement un minimum local en x0)
Alors f(x0)=0
Preuve : f a un maximum local en x0 ssi il eiste alpha > 0 tq $\forall x \in [x0 - alpha, x0 + alpha]$,
$f(x)\ \leq f(x0)$
Remarque : réciproque fausse : On peut avoir f derivable en x0
f'(x0) = 0 et f n'a pas de maximumou de minimum en x0

Opérations sur les fonctions derivables
Prop (dérivée d'une composée)
Soient f et g deux fonctions d'une variable réelle
On suppose que

1) f est définie au voisinnage d'un point x0 et f dérivable en ce point
2) g est définie au voisinnage de f(x0) et f dérivable en f(x0)

Alors g o f qui est la fonction
x → $g(f(x))$ est définie au voisinnage de x0 et dérivable en x0
$(gof)'(x0) = g'\left(f(x0)\right).f'(x0)$
Prop
Soient f et g deux fonctions d'une variable réelle définie au voisinnage de x0 et dérivables en x0
Alors

1) f+g est dérivable en x0 et $(f+g)'(x0) = f'(x0) + g'(x0)$
2) $\forall \alpha \in R, (\alpha.f)$ est dérivable en x0 et $(\alpha.f)'(x0) = \alpha.f'(x0)$
3) F.g est derivable en x0 et $(f.g)'(x0) = f'(x0)g(x0) + g'(x0)f(x0)$
4) Si $f(x0) \neq 0$ g/f est derivable en x0
   Et $\left(\frac{g}{f}\right)'(x0) = \frac{g\prime(x0)f(x0)-f'(x0)g(x0)}{f(x0)^2}$

II Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Th (de Rolle) a<b
f : [a,b] dans R telle que

1) f(a) = f(b)
2) f est continue sur [a,b]
3) f est dérivable sur]a,b[

Alors il existe c ∈ $]a,b[$ tq $f(c) = 0$

Th (des accroissements finis)
Soit f : [a,b] → R telle que

1) f est continue sur [a,b]
2) f est dérivable sur]a ;b[

Alors il existe c ∈ $]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$

III Formules de Taylon

$k \in N$ si f est k fois dérivable au voisinnage de x0, on note $f^{(k)}(x0)$ la dérivée k^{ieme}de f en x0 avec la convetntion que pour k=0 $f^{(0)}$=f
Th : (Taylor – Lagrange)
Soient f :[a,b]→ R et $n \in N$. On suppose que f est

1) n fois dérivable sur [a,b]
2) n+1 fois dérivable sur]a,b[

Alors il existe $c \in]a,b[$ tq $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + f''(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \ ... + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{n+1}(a)}{n+1!}(b-a)$^($n+1)$

Remarque : que se passe-t-il si f = P est un polynome de degré ≤ n

$$P(x) = \ a0 + a1x + a_n x^n$$

$on\ a\ (a = 0\ b = x)$

$P(x) = P(0) + P'(0)x + \cdots + \frac{P^k(0)}{k!}x^k + \cdots + \frac{P^n(0)}{n!}x^n$

De mm si on fait a = x_0 et b = x

On a $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

IV Dévelopement limités

I notions d'equivalence de fonctions en un point

Def : Soient d et g deux fonctions définies au voisinnage d'un point_ x_0, on dit que f et g sont equivalentes au voisinnage de x_0 si et seulement si

1) $\frac{f}{g}$ admet une limite lorsque $x \underset{x \neq x_0}{\longrightarrow} x_0$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f/g = 1$

Il existe une fonction $\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \varepsilon(x) = 0$ tel que au voisinnage de x0

$f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$

Remarque = $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$

Propriété :
Soit f une fonction définie au voisinnage de x0 et derivable en x0
Si $f(x_0) \neq 0$ alors au voisinnage de x0, $f(x) - f(x_0) \sim f'(x_0)(x - x_0)$

Propriété : (opérations sur les equivalences)
Coordonnées sont des fonctions définies au voisinnage d'un point x0
1) f~g => g~f
2) f~g et g~h => f~h
3) f~g et h~e => fh~ge

Remarque : les équivalences se multiplient mais ne s'ajoutent pas
F~g et h~e !=> f+h ~e+G

(f~g ⇔ f/g -> 1)

II dvlt limité

Def : soit f definie au voisinnage d'un point x0 sauf peut-être au point x0
Si n est un entier : on dit que f admet un dvlt limité à l'ordre n en x0 si et seulement si
1) il existe des nmobres a0, a1, …, an € R
2) Il existe une fonction $\varepsilon(x)$ tel que $\lim_{\substack{x \to x0 \\ x \neq x0}} \varepsilon(x) = 0$

Au voisinnage de x0
$$f(x) = \underbrace{a0 + a1(x - x0) + a2(x - x0)^2 + \cdots + an(x - x0)^n}_{\text{P(x) (polynome de degre <= n}} + (x - x0)^n \varepsilon(x)$$

Le polynome P est appellé <u>la partie principale du dvlt limité</u> de l'ordre n en x0 de f
Le terme $(x - x0)^n \varepsilon(x)$ est appelle <u>le reste de dvlt limité</u> a l'orde n de f en x0

Prop :
Soient f definie au voisinnage de x0 sauf peut –être en x0 et n € N
Si f admet un dvlt limité a l'ordre n en x0 alors celui-ci est unique

Th : (existence)
Soit f definie au voisinnage de x0 n € N*
Alor si f est n-1 fois derivable au voisinnage de x0
Et f est n fois derivable en x0 . Alors f admet un dvlt limité d'un ordre n au voisinnage de x0

Et $f(x) = f(x0) + f'(x0) - x - x0) + \frac{\ddot{f}\,(x0)}{2!} + \ \dots + \frac{\overset{n}{f}(x0)}{n!}(x - x0)^n + \ (x - x0)^n \varepsilon(x)$

La partie principale du DL de f en x0 est :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\overset{k}{f}(x0)}{k!}(x - x0)^k$$